

В. А. УСПЕНСКИЙ

## О ВЫЧИСЛИМЫХ ОПЕРАЦИЯХ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 18 V 1955)

В последнее время в исследованиях по теории алгоритмов, наряду с понятиями вычислимой функции, разрешимого и перечислимого множеств, которым соответствуют определения частично-рекурсивной функции, рекурсивного и рекурсивно-перечислимого множеств<sup>(2)</sup>, все чаще стали появляться понятия функции, вычислимой относительно некоторых других функций (или сводящейся по вычислимости к этим другим функциям), и множества, разрешимого относительно некоторых других множеств (или сводящегося по разрешимости к этим другим множествам). Соответствующие этим интуитивным понятиям точные определения принадлежат Клини и Посту<sup>(2,3)</sup>: говорят, что функция  $\varphi$  сводится по вычислимости к функциям  $\psi_1, \dots, \psi_l$ , если  $\varphi$  частично-рекурсивна относительно  $\psi_1, \dots, \psi_l$ ; говорят, что множество  $P$  сводится по разрешимости к множествам  $Q_1, \dots, Q_l$ , если характеристическая функция  $P$  сводится по вычислимости к характеристическим функциям  $Q_1, \dots, Q_l$ .

В настоящей заметке изучается естественно возникающее понятие множества, перечислимого относительно других множеств (или сводящегося по перечислимости к другим множествам). В терминах «сводимости по перечислимости» оказывается возможным сформулировать определения и двух других видов сводимости (следствие теоремы 7 и теорема 8). Определение «сводимости по перечислимости» дается в п. 7 при помощи вводимого в п. 4 понятия вычислимой операции. В п. 5 устанавливается связь этого понятия с одним определением, предложенным ранее А. Н. Колмогоровым, а в п. 6 — с некоторыми еще более ранними конструкциями Поста. Пп. 1—3 носят вводный характер.

1. Системы множеств как топологические пространства. Всякую систему множеств  $\mathcal{S}$  будем в дальнейшем без оговорок считать  $T_0$ -пространством со следующей топологией: для любого конечного множества  $F$  подсистему  $\mathcal{S}_F \subseteq \mathcal{S}$  всех множеств из  $\mathcal{S}$ , содержащих  $F$  в качестве подмножества, назовем элементарной открытой; открытой подсистемой в  $\mathcal{S}$  назовем любую сумму элементарных открытых. В частности, система  $\mathcal{S}_M$  всех подмножеств и система  $\mathcal{S}'_M$  всех конечных подмножеств произвольного множества  $M$  образуют каждая связное бикompактное  $T_0$ -пространство.

Лемма. Пусть  $M_1, \dots, M_l$  — произвольные множества,  $\mathcal{S}$  — произвольная система множеств. Отображение  $f$  топологического произведения  $\mathcal{S}_{M_1} \times \dots \times \mathcal{S}_{M_l}$  в  $\mathcal{S}$  тогда и только тогда непрерывно, когда для всяких  $X_1 \subseteq M_1, \dots, X_l \subseteq M_l$  выполняется равенство

$$f(X_1, \dots, X_l) =$$

$$= \bigcup f(X'_1, \dots, X'_l) \quad \{X'_1 \subseteq X_1, \dots, X'_l \subseteq X_l; X'_1 \in \mathcal{S}'_{M_1}, \dots, X'_l \in \mathcal{S}'_{M_l}\}.$$

2. Множество  $\mathfrak{F}$ . В теории алгоритмов приходится рассматривать не только множество  $N$  всех натуральных чисел, но и множество  $N^2$  всех упорядоченных пар и вообще множество  $N^n$  всех упорядоченных  $n$ -ок натуральных чисел, а также множество  $N_2 = \bigcup N^k$  всех конечных упорядоченных строчек натуральных чисел, множество  $N_3 = \bigcup N_2^h$  всех конечных упорядоченных строчек элементов  $N_2$ , и т. д. Нам будет удобно поэтому, следуя Гильберту <sup>(1)</sup>, сразу ввести в рассмотрение множество  $\mathfrak{F}$  всех «комбинаций» символа  $|$  с самим собой. Множество  $\mathfrak{F}$  определяется как минимальное множество, удовлетворяющее условиям: а) «единичная комбинация»  $|$  и «пустая комбинация»  $\wedge$  принадлежат  $\mathfrak{F}$ ; б) если  $a \in \mathfrak{F}$ , то  $(a) \in \mathfrak{F}$ ; в) если  $a \in \mathfrak{F}$  и  $b \in \mathfrak{F}$ , то  $ab \in \mathfrak{F}$  (через  $ab$  обозначается результат присоединения справа  $b$  к  $a$ , так что  $a \wedge a \wedge = a$ ). Отождествим  $0$  с  $\wedge$ ,  $1$  с  $|$ ,  $2$  с  $||$  и т. д., а упорядоченную « $n$ -ку»  $a_1, a_2, \dots, a_n$  элементов из  $\mathfrak{F}$  — с элементом  $(a_1)(a_2) \dots (a_n) \in \mathfrak{F}$ . Тогда каждое из множеств  $N^k$  и  $N_h$  окажется подмножеством  $\mathfrak{F}$ , и притом пересчитываемым (см. ниже). Системы  $\mathcal{S}$   $\mathfrak{F}$  всех подмножеств и  $\mathcal{S}'$   $\mathfrak{F}$  всех конечных подмножеств  $\mathfrak{F}$  обозначим  $\mathcal{V}$  и  $\mathcal{V}'$ . Каждый элемент  $(a_1)(a_2) \dots (a_n) \in \mathfrak{F}$  назовем представителем конечного (неупорядоченного) множества,  $\{a_1, a_2, \dots, a_n\} \in \mathcal{V}'$ ; каждое  $n$ -элементное множество из  $\mathcal{V}'$  имеет, таким образом,  $n!$  представителей в  $\mathfrak{F}$ .

(1—1)-соответствие между некоторым подмножеством  $N$  и  $\mathfrak{F}$  называется (1—1)-нумерацией  $\mathfrak{F}$ ; число  $h \in N$ , соответствующее элементу  $h \in \mathfrak{F}$ , называется номером  $h$ . Нумерацию назовем допустимой, коль скоро существуют такие вычислимые функции  $\alpha(x)$  и  $\beta(x, y)$ , что если  $m$  и  $n$  суть номера  $m$  и  $n$ , то  $\alpha(m)$  и  $\beta(m, n)$  суть номера  $(m)$  и  $m \wedge n$ . Подмножество  $R \subseteq \mathfrak{F}$  назовем пересчитываемым (вообще, принадлежащим классу  $P_n$ ,  $n \geq 1$ ), если множество его номеров в допустимой нумерации пересчитываемо (соответственно, принадлежит классу  $P_n$  проективно-рекурсивной классификации Клини — Мостовского <sup>(6)</sup>); можно доказать, что понятие пересчитываемости (вообще, принадлежности классу  $P_n$  при  $n \geq 1$ ) не зависит от того, из какой именно допустимой нумерации исходить.

3. Частичные отображения. Всякое отображение  $E \subseteq X$  в  $Y$  будем называть частичным отображением  $X$  в  $Y$ ; если  $X$  и  $Y$  — топологические пространства, то можно говорить о непрерывных частичных отображениях  $X$  в  $Y$ . Графиком частичного отображения  $\psi$  теоретико-множественной степени  $\mathfrak{F}'$  в  $\mathfrak{F}$  назовем множество  $G_\psi$  всех таких элементов  $(x_1)(x_2) \dots (x_l)(v) \in \mathfrak{F}$ , что  $v = \psi(x_1, \dots, x_l)$ ; графиком частичного отображения  $\Psi$  степени  $\mathfrak{F}'$  в  $\mathcal{V}$  назовем множество  $G_\Psi$  всех таких элементов  $(x_1)(x_2) \dots (x_l)(v) \in \mathfrak{F}$ , что  $v \in \Psi(x_1, \dots, x_l)$ ; частичное отображение назовем вычислимым, если его график есть пересчитываемое множество. Каждое частичное отображение  $F$  теоретико-множественной степени  $(\mathcal{V}')^l$  в  $\mathcal{V}$  индуцирует частичное отображение  $\tilde{F}$  степени  $\mathfrak{F}'$  в  $\mathcal{V}$  такое, что  $F(x_1, \dots, x_l) = \tilde{F}(\xi_1, \dots, \xi_l)$ , коль скоро  $x_i \in \mathfrak{F}$  есть представитель  $\xi_i \in \mathcal{V}'$  ( $i = 1, \dots, l$ ); назовем  $F$  вычислимым, если  $\tilde{F}$  вычислимо.

4. Вычислимые операции. Пусть  $M_1, \dots, M_l$  — пересчитываемые подмножества  $\mathfrak{F}$ . Отображение  $\mathcal{S}_{M_1} \times \dots \times \mathcal{S}_{M_l}$  в  $\mathcal{V}$  назовем вычислимой операцией ( $l$ -местной), если: а) оно непрерывно; б) индуцированное им частичное отображение  $(\mathcal{V}')^l$  в  $\mathcal{V}$  вычислимо. При помощи леммы (п. 1) доказываются следующие теоремы:

Теорема 1. Суперпозиция вычислимых операций есть вычислимая операция.

Теорема 2. Всякое вычислимое и непрерывное частичное отображение  $(\mathcal{V}')^l$  в  $\mathcal{V}$  можно продолжить до вычислимой операции.

Теорема 3. Для всякой  $l$ -местной вычислимой операции  $U$  и всяких перечислимых в  $\mathfrak{F}$  множеств  $E_1, \dots, E_l$ ,  $D$  существует вычислимая операция  $U_1$ , являющаяся отображением  $\mathfrak{F}_{E_1} \times \dots \times \mathfrak{F}_{E_l}$  в  $\mathfrak{F}_D$  и такая, что для всяких  $S_1 \subseteq E_1, \dots, S_l \subseteq E_l$ ,  $R \subseteq D$  из  $U(S_1, \dots, S_l) = R$  вытекает  $U_1(S_1, \dots, S_l) = R$ .

Теорема 4. Пусть  $U$  — вычислимая операция и  $R = U(S_1, \dots, S_l)$ . Тогда, если  $S_i \in P_n$  ( $n = 1, 2, \dots; i = 1, \dots, l$ ), тои  $R \in P_n$ . В частности, если все  $S_i$  перечислимы, то и  $R$  перечислимо.

5. Операции Колмогорова. Минимальное множество, удовлетворяющее условиям а) — в) из п. 2 и содержащее сверх того «неизвестные»  $x_1, \dots, x_n$ , обозначим  $\mathfrak{F}[x_1, \dots, x_n]$ . Каждый элемент  $g(x_1, \dots, x_n)$  из  $\mathfrak{F}[x_1, \dots, x_n]$  при замене  $x_1, \dots, x_n$  элементами  $a_1, \dots, a_n$  из  $\mathfrak{F}$  переходит в элемент  $g(a_1, \dots, a_n)$  из  $\mathfrak{F}$ . Правил Колмогорова называется строчка

$$g_1(x_1, \dots, x_n), \nu_1; g_2(x_1, \dots, x_n), \nu_2; \dots; g_m(x_1, \dots, x_n), \nu_m; \\ g(x_1, \dots, x_n), \nu, \quad (*)$$

где  $g_1(x_1, \dots, x_n), g(x_1, \dots, x_n) \in \mathfrak{F}[x_1, \dots, x_n]$ ;  $m, n, \nu_1, \nu$  — натуральные числа. Конечная упорядоченная система множеств  $M_1, \dots, M_k$  называется замкнутой относительно правила (\*), если для всяких  $a_1, \dots, a_n \in \mathfrak{F}$  из  $g_1(a_1, \dots, a_n) \in M_{\nu_1}, \dots, g_m(a_1, \dots, a_n) \in M_{\nu_m}$  вытекает  $g(a_1, \dots, a_n) \in M_\nu$ . Операция Колмогорова ( $l$ -местная)  $K$  задается конечным множеством  $\mathfrak{R}$  правил Колмогорова и набором натуральных чисел  $k, x_1, \dots, x_l, x$ . Результат применения операции  $K$  к множествам  $S_1, \dots, S_l$  определяется так: рассматриваются системы множеств  $M_1, \dots, M_k$ , замкнутые относительно каждого из правил  $\mathfrak{R}$  и такие, что  $M_{x_i} \supseteq S_i$  ( $i = 1, \dots, l$ ); среди них выбирается такая система  $M_1^*, \dots, M_k^*$ , что для всякой из рассматриваемых систем  $M_1, \dots, M_k$  выполняются соотношения  $M_i \supseteq M_i^*$  ( $i = 1, \dots, k$ ); полагается по определению  $K(S_1, \dots, S_l) = M_x^*$ .

Теорема 5. Для того чтобы отображение  $\nu^1$  в  $\nu$  было вычислимой операцией, необходимо и достаточно, чтобы оно было операцией Колмогорова.

6. Операции Поста. Обобщая и уточняя идеи Поста (<sup>4,5</sup>), естественно приходим к следующему определению операции Поста. Через  $\mathfrak{S}_A[x_1, \dots, x_n]$  обозначим минимальное множество: а) содержащее множество  $\mathfrak{S}_A$  слов в алфавите  $A$  (?); б) содержащее «неизвестные»  $x_1, \dots, x_n$ ; в) вместе с каждым своими элементами  $a$  и  $b$  содержащее элемент  $ab$ . Каждый элемент  $g(x_1, \dots, x_n)$  из  $\mathfrak{S}_A[x_1, \dots, x_n]$  при замене  $x_1, \dots, x_n$  элементами  $a_1, \dots, a_n$  из  $\mathfrak{S}_A$  переходит в элемент  $g(a_1, \dots, a_n)$  из  $\mathfrak{S}_A$ . Заменяя всюду в определении операции Колмогорова слова «правило Колмогорова» на «правило Поста», «операция Колмогорова» — на «операция Поста» и символ  $\mathfrak{F}$  на символ  $\mathfrak{S}_A$ , получаем определение операции Поста в алфавите  $A$ . Операцию Поста в алфавите  $B \supseteq A$  назовем операцией Поста над алфавитом  $A$ .

(1—1)-соответствие между некоторым подмножеством  $\mathfrak{F}$  и  $\mathfrak{S}_A$  назовем (1—1)-нумерацией  $\mathfrak{S}_A$ ; элемент  $h \in \mathfrak{F}$ , соответствующий элементу  $\{ \in \mathfrak{S}_A$ , назовем номером  $\{$ . Нумерацию назовем допустимой, коль скоро существует такая вычислимая функция  $\gamma(x, y)$  (т. е. вычислимое частичное отображение  $\mathfrak{F}^2$  в  $\mathfrak{F}$ ), что если  $m$  и  $n$  суть номера  $a$  и  $b$ , то  $\gamma(m, n)$  есть номер  $ab$  (в частности, допустимой является нумерация, рассмотренная в (<sup>6</sup>)).

Теорема 6. Выберем произвольную допустимую нумерацию и через  $\pi M$  обозначим совокупность номеров элементов множества  $M \subseteq \mathfrak{S}_A$  в этой нумерации. Для того чтобы  $l$ -местная операция, ставящая в соответствие всяким множествам  $S_1, \dots, S_l \subseteq \mathfrak{S}_A$



множество  $P(S_1, \dots, S_l) \subseteq \mathfrak{S}_A$ , была операцией Поста над  $A$ , необходимо и достаточно, чтобы существовала такая вычислимая операция  $U$ , что  $\pi P(S_1, \dots, S_l) = U(\pi S_1, \dots, \pi S_l)$ .

7. Сводимость. Назовем множество  $R$  сводящимся по перечислимости к множествам  $S_1, \dots, S_l$ , если существует такая вычислимая операция  $U$ , что  $R = U(S_1, \dots, S_l)$ . Если  $S_i$  и  $R$  суть подмножества натурального рода  $N$ , то, в силу теоремы 3, можно считать, что  $U$  есть отображение  $N^l$  в  $N$ .

Теорема 7. Оператор  $F$ , переводящий всякий набор арифметических функций  $\psi_1, \dots, \psi_l$  от  $m_1, \dots, m_l$  аргументов соответственно в  $n$ -местную функцию  $\varphi = F(\psi_1, \dots, \psi_l)$ , тогда и только является частично-рекурсивным <sup>(2)</sup>, когда существует такая вычислимая операция  $U$ , что  $G_F(\psi_1, \dots, \psi_l) = U(G_{\psi_1}, \dots, G_{\psi_l})$ .

(В силу теоремы 3 можно считать, что  $U$  есть отображение  $N^{m_1+1} \times \dots \times N^{m_l+1}$  в  $N^{n+1}$ .)

Следствие. Функция  $\varphi$  тогда и только тогда сводится по вычислимости к функциям  $\psi_1, \dots, \psi_l$ , когда ее график сводится по перечислимости к графикам  $\psi_1, \dots, \psi_l$ .

Теорема 8. Множество  $P$  тогда и только тогда сводится по разрешимости к множеству  $Q$ , когда каждое из множеств  $P$  и  $\bar{P}$  сводится по перечислимости к  $Q$  и  $\bar{Q}$  (здесь  $\bar{P}$  и  $\bar{Q}$  суть дополнения к  $P$  и  $Q$ ; ср. <sup>(5)</sup>).

Следствие. Если  $P$  и  $Q$  перечислимы, то сводимость по разрешимости  $P$  к  $Q$  равносильна сводимости по перечислимости  $P$  к  $\bar{Q}$ .

А. Н. Колмогорову автор обязан значительным улучшением заметки.

Поступило  
3 V 1955

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- <sup>1</sup> Д. Гильберт, Основания геометрии, 1948, добавление 7. <sup>2</sup> S. C. Kleene, Introduction to Metamathematics, 1952. <sup>3</sup> S. C. Kleene, E. L. Post, Ann Math., 59, No. 3, 379 (1954). <sup>4</sup> E. L. Post, Am. J. Math., 65, 197 (1943). <sup>5</sup> E. L. Post, Bull. Am. Math. Soc., 54, No. 7, 641 (1948). <sup>6</sup> A. Mostowski, Fund. Math., 34, 81 (1947). <sup>7</sup> А. А. Марков, Тр. Матем. инст. им. Стеклова АН СССР, 42 (1954). <sup>8</sup> В. А. Успенский, ДАН, 91, 737 (1953).